



گزینه ۳

۱

رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ را برای هر دو حالت می‌نویسیم. با توجه به این رابطه با افزایش جرم، دوره نوسان افزایش می‌یابد.

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \frac{T_1 + 0.1}{T_1} = \sqrt{\frac{100}{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow T_1 = 0.1 \text{ s}$$

با استفاده دوباره از $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ برای T_1 ، ثابت فنر را به دست می‌آوریم.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \Rightarrow 0.1 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{k}} \Rightarrow \frac{1}{20\pi} = \sqrt{\frac{2}{10k}} \\ \Rightarrow k = 100 \text{ N/m} = 10 \text{ N/cm}$$

گزینه ۲

۲

در هر دوره تناوب دو بار از مرکز نوسان رد می‌شویم. پس: ۳۰ بار عبور از مرکز نوسان = ۱۵ نوسان کامل.

$$T = \frac{t}{N} = \frac{1 \text{ min}}{15} = \frac{60 \text{ s}}{15} = 4 \text{ s}$$

در هر نوسان کامل، چهار بار از ۱ cm مرکز تعادل عبور می‌کنیم.

$$N = \frac{t}{T} = \frac{1 \text{ h}}{4 \text{ s}} = \frac{3600 \text{ s}}{4 \text{ s}} = 900$$

$$\Rightarrow 900 \times 4 = 3600 \text{ دفعه عبور از ۱ cm مرکز تعادل}$$

ابتدا دامنه نوسان و طول فنر در لحظه تعادل جسم را به دست می‌آوریم:

$$A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} = \frac{48 - 32}{2} = 8 \text{ cm}$$

$$L_{\text{تعادل}} = \frac{L_{\min} + L_{\max}}{2} = 40 \text{ cm}$$

با استفاده از $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، بسامد زاویه‌ای دستگاه را به دست می‌آوریم.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1}} = 20 \text{ rad/s}$$

هنگامی که طول فنر ۴۲ cm است فاصله وزنه از نقطه تعادل برابر $x = 42 - 40 = 2 \text{ cm}$ است. طبق رابطه $a = -\omega^2 x$ در این مکان شتاب برابر است با:

$$a = -\omega^2 x = -400 \times \left(\frac{2}{100}\right) = -8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow |a| = 8 \text{ m/s}^2$$

طبق رابطه‌های $a = -\omega^2 x$ و $x = A \cos(\omega t)$ ، رابطه شتاب - زمان به صورت $a = -A\omega^2 \cos(\omega t)$ است. باتوجه به نمودار در $t = 0.6 \text{ s}$ ، شتاب در SI برای دومین بار $+10\pi^2$ است. بنابراین:

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t) \Rightarrow +10\pi^2 = -20\pi^2 \cos(\omega \times 0.6) \Rightarrow \cos(\omega \times 0.6) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega \times 0.6 = (2k + 1)\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega \times 0.6 = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \dots$$

$$\xrightarrow{\text{دومین مرتبه}} \omega \times 0.6 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{20\pi}{9} \text{ rad/s}$$

بیشینه شتاب از رابطه $a_m = A\omega^2$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$a_m = A\omega^2 \Rightarrow 20\pi^2 = A \times \left(\frac{20\pi}{9}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{81}{20} = 4.05 \text{ cm}$$

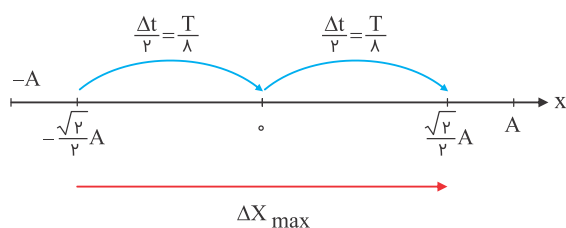
دوره تناوب نوسانگر جرم و فنر را محاسبه می‌کنیم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{20}} = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\sqrt{10}=\pi} T = 2s$$

بازه زمانی داده شده را بر حسب دوره تناوب محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0.5}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

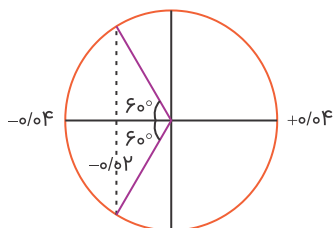
نوسانگر هر چند به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد، تندی آن بیشتر است، در نتیجه در وضعیت شکل زیر، نوسانگر بیشترین جابه‌جایی را در مدت $\Delta T = \frac{T}{4}$ دارد.



$$\Delta x_{\max} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A\right) = \sqrt{2}A$$

$$F = -m\omega^2 x \Rightarrow 16 = -0.2(20\pi)^2 x \Rightarrow x = -0.02$$

از دایره مثلثاتی و نسبت و تناسب برای حل سوال کمک می‌گیریم:



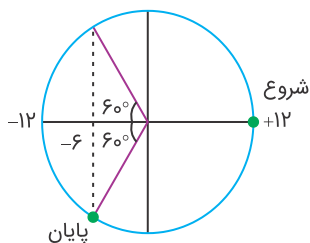
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10}$$

$$T = \frac{1}{10} \quad 360^\circ$$

$$t_1 = ? \quad 120^\circ \Rightarrow t_1 = \frac{1}{30}, \quad t_2 = \frac{1}{15}$$

$$t_2 = ? \quad 240^\circ$$

دوره تناوب برابر با $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\lambda} s$ است. به کمک دایره مثلثاتی در نوسان خواهیم داشت:



توجه شود در ربع سوم دایره، حرکت تندشونده است.

$$T = \frac{1}{\lambda} \quad 360^\circ \Rightarrow t = \frac{1}{12}$$

$$t = ? \quad 240^\circ$$

ابتدا ω وزنه و فنر و تندی بیشینه وزنه را حساب می‌کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20 \text{ rad/s}$$

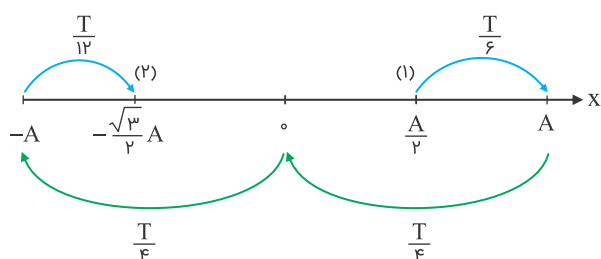
$$v_m = A\omega = 0.2 \times 20 = 4 \text{ m/s}$$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، کار نیروی فنر برابر تغییرات انرژی جنبشی وزنه است، پس:

$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{F_e} = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{F_e} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (4^2 - 2^2) \Rightarrow W_{F_e} = 12 \text{ J}$$

در زمان‌هایی که نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است، حرکت آن تندشونده است. به کمک الگوهای زمانی برای جابه‌جایی نوسانگر بین نقاط خاص، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{T}{6} + \frac{T}{4} + \frac{T}{4} + \frac{T}{6} = 3\frac{T}{4} \xrightarrow{\Delta t=1s} 3\frac{T}{4} = 1 \Rightarrow T = \frac{4}{3} \text{ s}$$

ابتدا دورهٔ نوسان نوسانگر را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که معادلهٔ کلی نوسانگر به صورت $x = A \cos(\frac{2\pi}{T}t)$ است، دورهٔ نوسان برابر است با:

$$100\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.02 \text{ s}$$

نسبت مدت 0.03 s به دورهٔ نوسان برابر $\frac{3}{2}$ می‌باشد، در نتیجه $\Delta t = \frac{3}{2}T$ است. در مدت $\frac{T}{2}$ ، نوسانگر مسافت $2A$ را طی می‌کند. در مدت $\Delta t = \frac{3T}{2}$ ، مسافت $3(2A) = 6A$ را طی می‌کند. پس A برابر است با:

$$6A = 24 \text{ cm} \Rightarrow A = 4 \text{ cm}$$

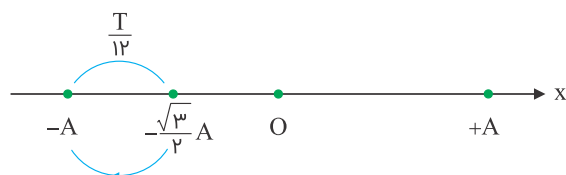
طول مسیر نوسان ۲ برابر دامنهٔ نوسان و برابر $2A = 8 \text{ cm}$ است.

به ازای هر نوسان کامل، مسافت $4A = 4 \times 0.02 = 0.08$ متر طی می‌شود. پس به ازای $1/6$ متر، می‌توان نتیجه گرفت که $20 = \frac{1/6}{0.08}$ بار نوسان کامل انجام شده است.

$$T = \frac{t}{N} = \frac{60 \text{ s}}{20} = 3 \text{ s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow 3 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{20}} = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{m}{20}} = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \Rightarrow m = 4.5 \text{ kg}$$

وضعیت نوسانگر روی پاره‌خط نوسان مانند شکل زیر است:

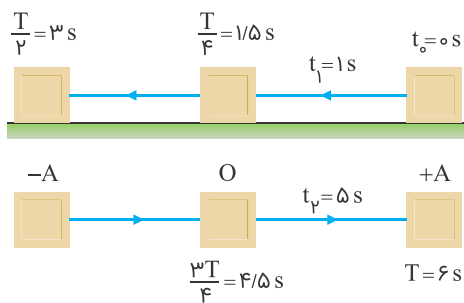


$$\frac{T}{12} = \frac{1}{30} \Rightarrow T = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ s}$$

ابتدا با استفاده از رابطه $T = \frac{t}{n}$ دوره تناوب حرکت نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow[t=10]{t=1 \text{ min}=60 \text{ s}} T = \frac{60}{10} = 6 \text{ s}$$

بنابراین باتوجه به ویژگی‌های حرکت هماهنگ ساده، زمان‌بندی جابه‌جایی نوسانگر طی یک دوره تناوب روی پاره‌خط نوسان مطابق شکل زیر است:



مشاهده می‌شود که نوسانگر در لحظه $t_1 = 1 \text{ s}$ در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است و حرکت آن تندشونده است. همچنین در لحظه $t_2 = 5 \text{ s}$ نوسانگر در حال دور شدن از مرکز نوسان و نزدیک شدن به نقطه بازگشت (انتهای پاره‌خط نوسان) است و حرکت آن کندشونده است.

در بازه (t_1, t_2) نوسانگر از مکان $+1 \text{ cm}$ در جهت منفی محور عبور می‌کند و با یک‌بار تغییر جهت از مکان -1 cm در جهت مثبت محور عبور می‌کند. مدت‌زمان این حرکت برابر $\frac{T}{2}$ است. پس با توجه به این‌که $A = \frac{4}{100} \text{ m}$ و تندی متوسط در این بازه 2 m/s است، دوره نوسان برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{2 \times 0.04}{\frac{T}{2}} \Rightarrow T = 0.08 \text{ s}$$

بیشینه شتاب نوسانگر برابر $A\omega^2$ است؛ پس:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0.04 \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0.04 \times \left(\frac{2\pi}{0.08}\right)^2 = \frac{4}{100} \times 625 \times \pi^2$$

$$a_{\max} = 25\pi^2 = 250 \text{ m/s}^2$$

نیروی وارد بر نوسانگر همان نیروی فنر است که از رابطه $F = -kx$ به دست می‌آید. بنابراین با مقایسه نیروی فنر و نیروی وارد بر نوسانگر یعنی $F = -10\pi^2 x$ ، ثابت فنر $k = 10\pi^2 = 100 \text{ N/m}$ به دست می‌آید.